Corso di formazione Ambito 11 Modena

L'Istituto di Istruzione Superiore "Primo Levi"

Scuola-Polo per la formazione dell'Ambito 11 Emilia Romagna

organizza

L'ELABORATO DEI LICEI SCIENTIFICI PER L'ESAME DI STATO

- **Esperto: Prof. Andrea Spagni**
  - Docente di Matematica e Fisica presso l'Istituto «A.F.Formiggini» di Sassuolo (MO)
  - Docente a Contratto per l'Insegnamento di Fisica I presso di Ingegneria Meccatronica dell'Università di Modena e Reggio Emilia
- Dall'A.A. 2000-2001 e fino all'A.A. 2014-2015 (Docente di Didattica della Fisica nei corsi S.S.I.S. e T.F.A.) di UNIMORE

Articolo 18

(Articolazione e modalità di svolgimento del colloquio d'esame)

1. L'esame è così articolato:

a) discussione di un elaborato concernente le discipline caratterizzanti per come individuate agli allegati C/1, C/2, C/3, e in una tipologia e forma ad esse coerente, integrato, in una prospettiva multidisciplinare, dagli apporti di altre discipline o competenze individuali presenti nel curriculum dello studente, e dell'esperienza di PCTO svolta durante il percorso di studi.........

.... *Omissis*....

c) analisi, da parte del candidato, del materiale scelto dalla sottocommissione ai sensi dell'articolo 17, comma 3, con trattazione di nodi concettuali caratterizzanti le diverse discipline, anche nel loro rapporto interdisciplinare;

d) esposizione da parte del candidato, eventualmente mediante una breve relazione ovvero un elaborato multimediale, dell'esperienza di PCTO svolta durante il percorso di studi, solo nel caso in cui non sia possibile ricomprendere tale esperienza all'interno dell'elaborato di cui alla lettera a).

Nelle slide che seguono si propongono esempi di possibili elaborati nei quali, partendo da un nodo concettuale comune, (lavoro di gruppo)

.... Il consiglio di classe provvede altresì all'indicazione, tra tutti i membri designati per far parte delle sottocommissioni, di docenti di riferimento per l'elaborato, a ciascuno dei quali è assegnato un gruppo di studenti.

- si riassumono le conoscenze matematiche necessarie (calcolo integro-differenziale, calcolo delle probabilità, variabili aleatorie, trasformazioni di grafici, ecc..)
- si attua il passaggio dalle conoscenze alle competenze utilizzando il nodo concettuale di partenza per essere in grado di analizzare problematiche derivanti principalmente dalla fisica ma anche dall'economia, dalle scienze sociali, ecc.., per «far emergere la prospettiva multidisciplinare del colloquio» richiamata dal comma a) art.18 dell'ordinanza.

Gli esempi forniti possono essere adattati , nel caso sussistessero le condizioni, «alle competenze individuali presenti nel curriculum dello studente o dell’esperienza di P.C.T.O.»

La forma datane può essere facilmente curvata alle specifiche esigenze del singolo studente laddove è chiara la relazione tra le varie grandezze matematiche e fisiche in gioco:

- grandezze che misurano la rapidità di variazione (derivate)
- grandezze che misurano la somma di effetti (integrali)
- grandezze approcciabili in termini statistici e per le quali la probabilità è desunta dai dati di realtà a disposizione (curve di distribuzione sia continue che discrete, …)

Primo esempio di «lavoro per gruppi»

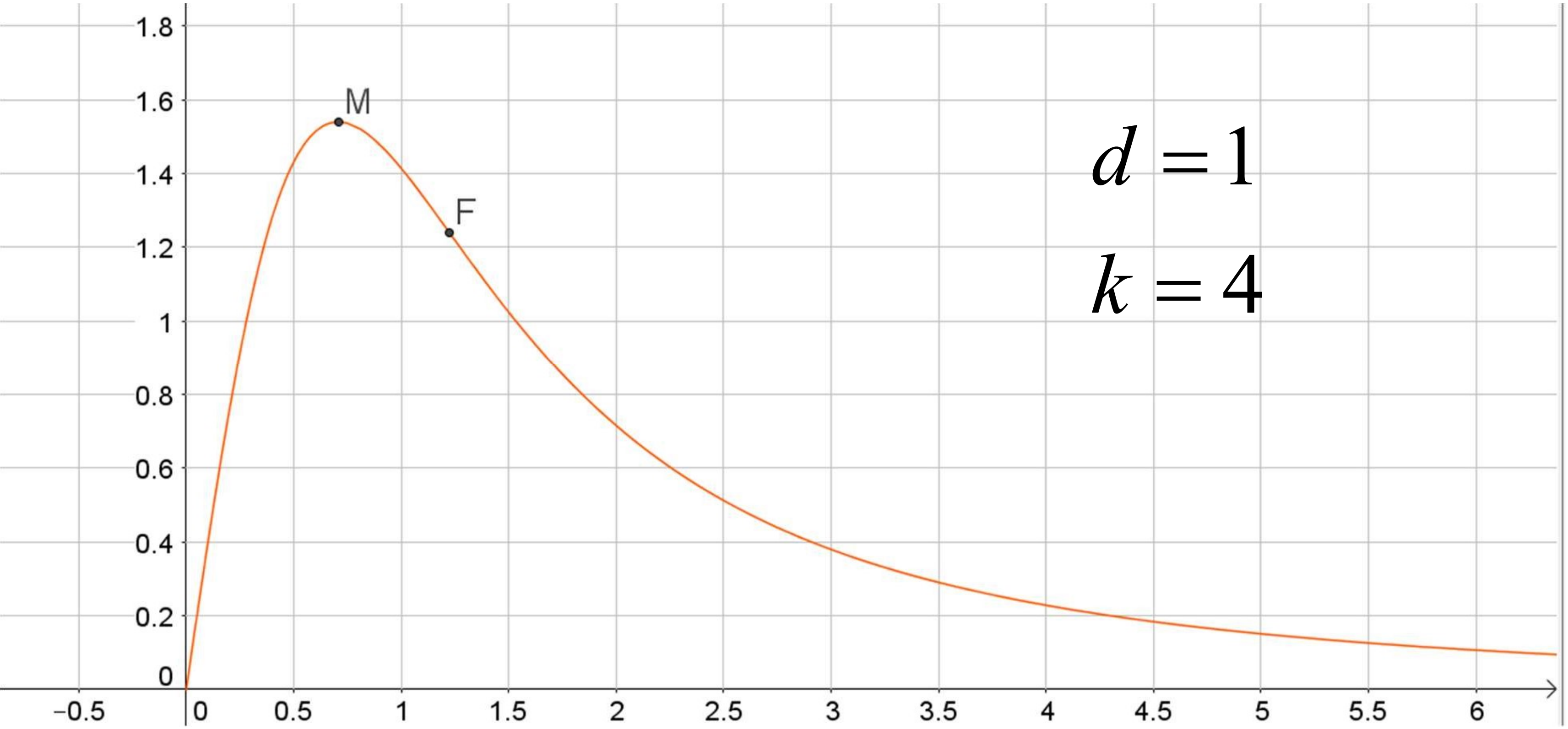
Step 1 : tutti i componenti del gruppo studiano la funzione f(x)

$$f:[0;+\infty[\; \rightarrow R$$

$$f(x) = \frac{kx}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

determinando in particolare le coordinate del punto di massimo e (facoltativamente) di flesso in funzione del parametro d.

N.B. Nelle illustrazioni che seguono la costante k è fissata al valore 4, mentre il parametro d è variabile con $d \in [0;;+\infty[$



$$d = 1$$

$$k = 4$$

$$M\left(\frac{d}{\sqrt{2}};\frac{8}{3\sqrt{3}\cdot d^2}\right)$$

$$F\left(\sqrt{\frac{3}{2}}d;\frac{8\sqrt{3}}{5\sqrt{5}\cdot d^2}\right)$$

$$f:[0;+\infty[\rightarrow R$$

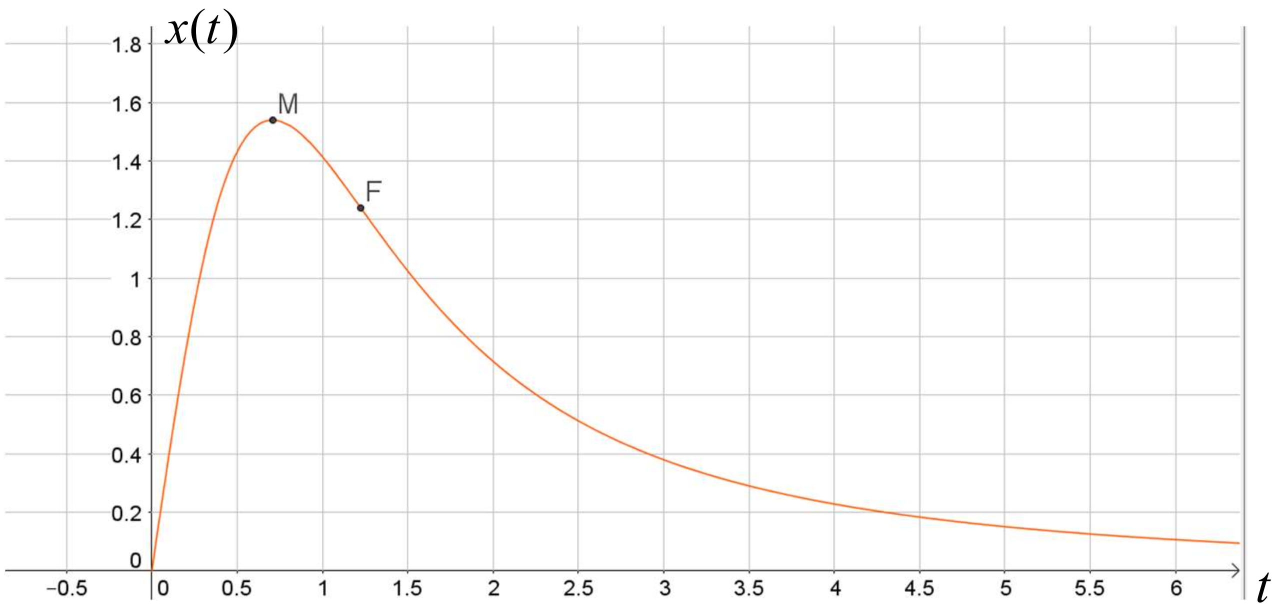
$$f(x)=\frac{4x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Studio di funzione iniziale

Step 2: differenziazione delle attività per i vari componenti del Gruppo

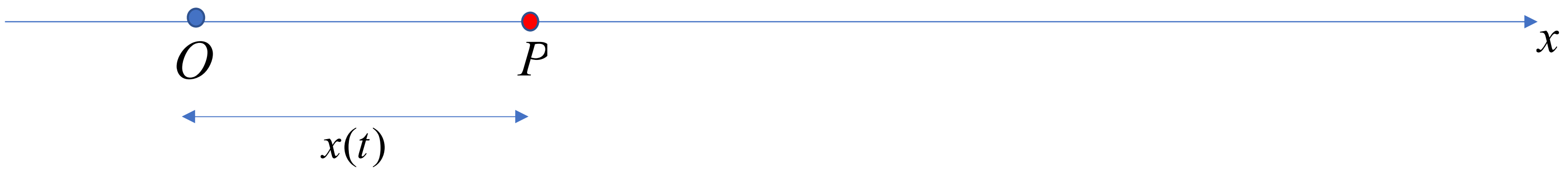
- Reinterpretazione dello studio di funzione come grafico x(t) o v(t) di un moto unidimensionale
- Reinterpretazione dello studio di funzione come traiettoria di un moto bidimensionale
- Calcolo di campi elettrici di configurazioni di cariche statiche (analisi di massimi e minimi, analisi sulle grandi distanze, telecomunicazioni…)
- Procedura di normalizzazione che renda la funzione assegnata una distribuzione di probabilità per una variabile aleatoria continua X
- Interpretazione della funzione come densità di frequenza di un carattere ed interpretazione della funzione di ripartizione come **frequenza cumulata** (esempi economici, fisici, delle scienze sociali …possibilità di raccordo con eventuali attività connesse al P.C.T.O): trasformazioni geometriche per ottenere il «best fit» con i dati di realtà

Reinterpretazione dello studio di funzione come grafico x(t) di un moto unidimensionale del punto P



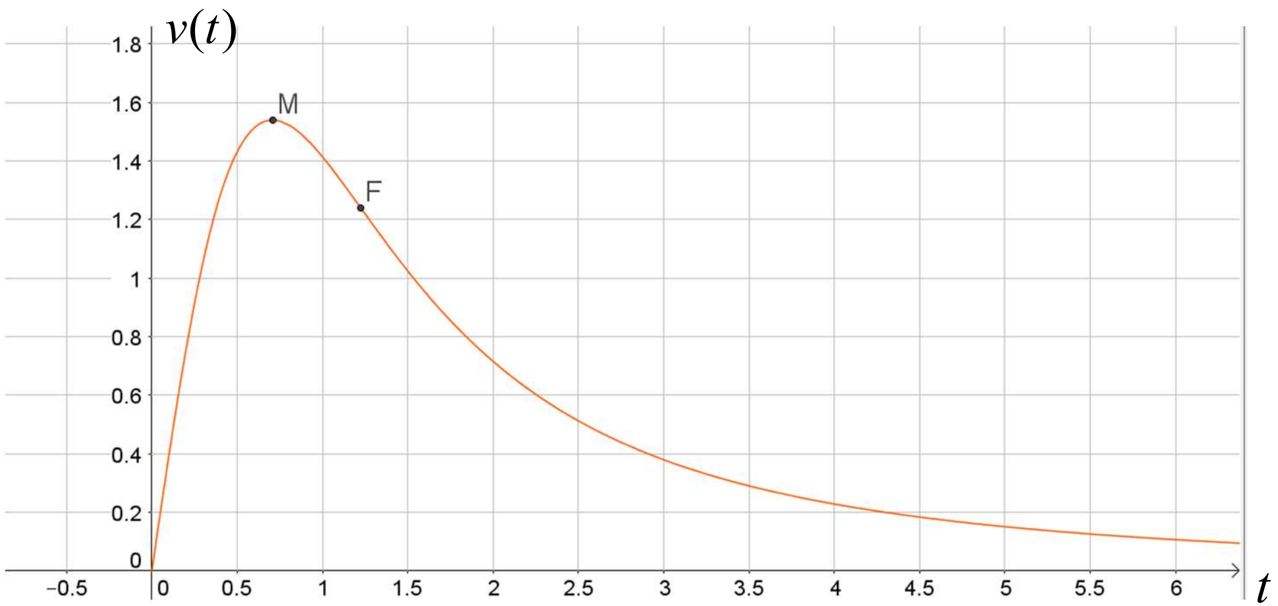
Domande guida

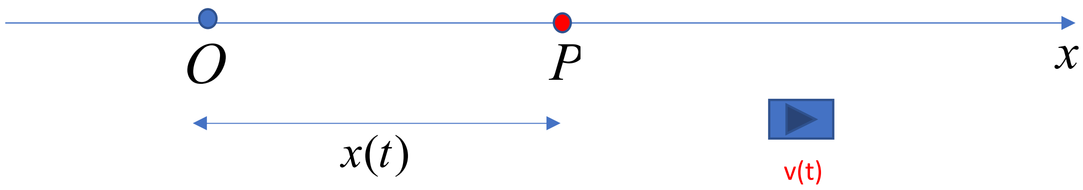
- Quale tratto di «rotaia» viene visitato dal punto P ?
- In quale/i istante/i la velocità del punto è nulla ?
- Cosa succede alla posizione del punto e alla sua velocità quando t $\longrightarrow +\infty$
- In quali intervalli temporali il punto P si muove «in avanti» ? …e «all'indietro» ?
- In quale/i istante/i l'accelerazione è nulla ?



x(t)

Reinterpretazione dello studio di funzione come grafico v(t) di un moto unidimensionale del punto P

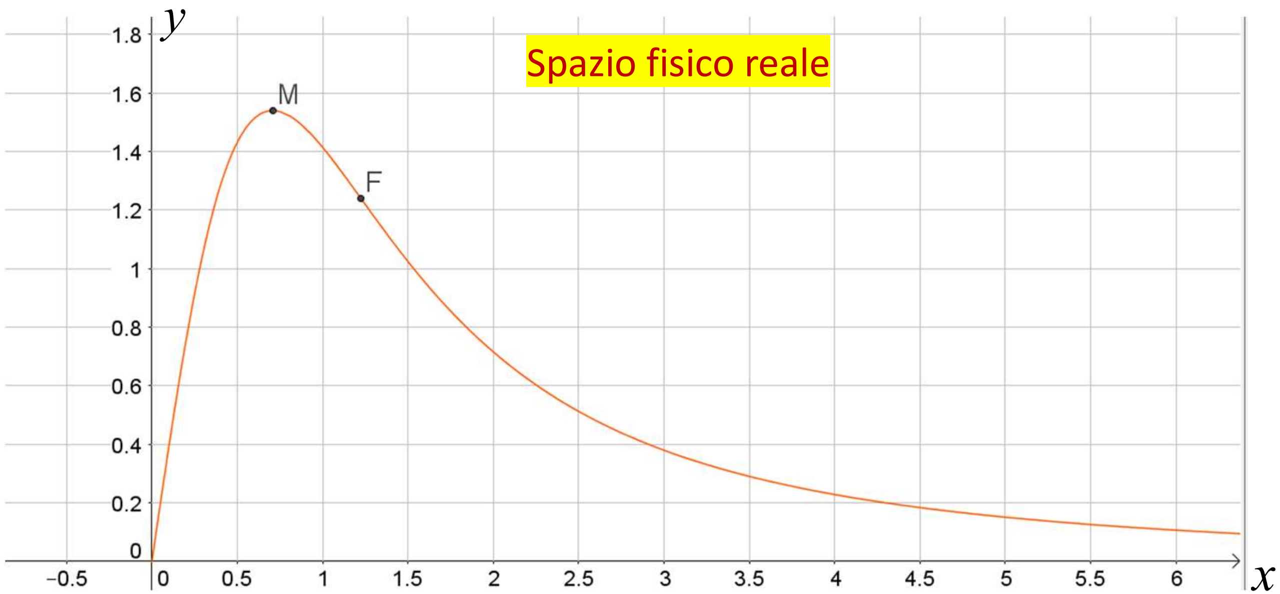




Domande guida

- In quale posizione si trova il punto all'istante t=0 ? («domanda tranello»)
- In quale/i istante/i la velocità del punto è nulla ? In quale istante/i essa è massima ?
- Cosa succede alla velocità del punto quando t $\to +\infty$
- In quali intervalli temporali il punto P si muove «in avanti» ? …e «all'indietro» ?
- In quale/i istante/i l'accelerazione è nulla ?
- In quali intervalli temporali l'accelerazione è positiva? In quali intervalli temporali l'accelerazione è negativa ?
- Quanto spazio ha percorso il punto nei primi 5 secondi ? Dove si trova al quinto secondo se $x_0 = 2m$
- Sapresti ricavare la legge oraria del punto P assumendo $x_0 = 2m$?
- Per t $\longrightarrow +\infty$ quanta spazio percorrerà il punto ?

- Reinterpretazione dello studio di funzione come traiettoria di un moto bidimensionale



La funzione disegnata può reinterpretarsi come «traiettoria» di un moto dimensionale, facendo derivare la sua equazione cartesiana da leggi orarie date nella direzione x e y. E' chiaro che la «parametrizzazione» più naturale si ottiene reinterpretando l'ascissa come «tempo che scorre»

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \dfrac{kt}{(t^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

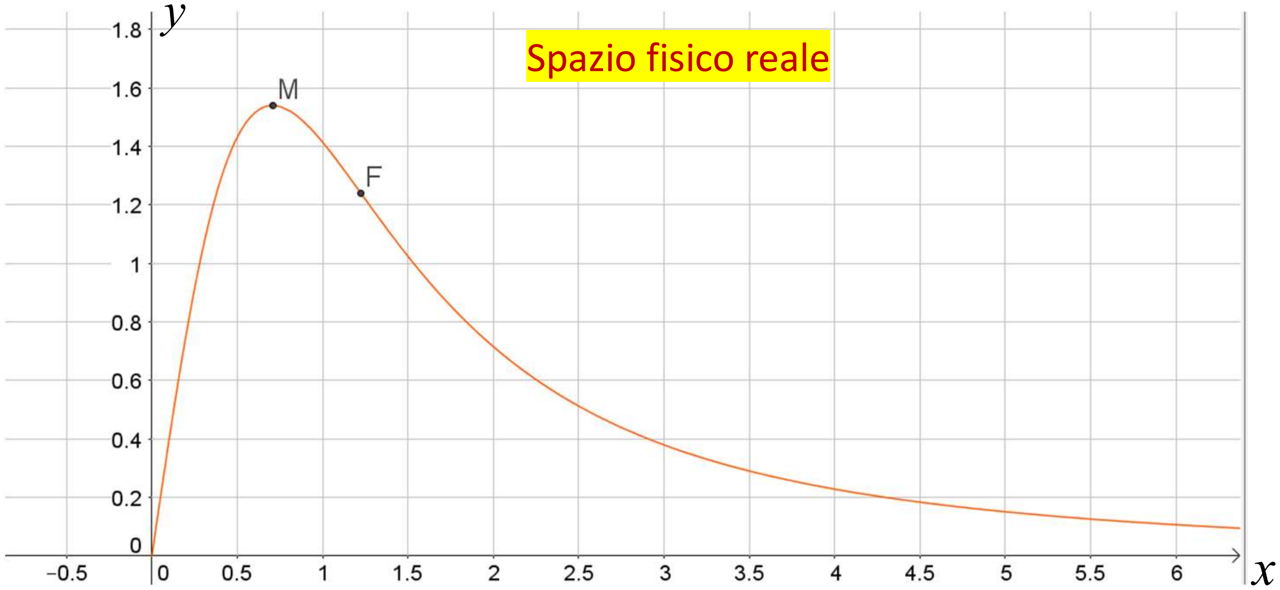
- E' altresì ovvio che la scelta di tale parametrizzazione «vincola» il moto del punto P sulla traiettoria seguita ad essere tale che la sua proiezione P_x si muove di moto rettilineo uniforme con velocità 1m/s
- Come è noto potremmo riparametrizzare la curva (fermo restando l'equazione della traiettoria seguita) con un nuovo parametro s=f(t) dove la funzione f(t) deve essere per ovvie ragioni fisiche tale che

a) f(0)=0

b) monotona crescente (o decrescente) (e quindi iniettiva)

Moti bidimensionali

- Reinterpretazione dello studio di funzione come traiettoria di un moto bidimensionale

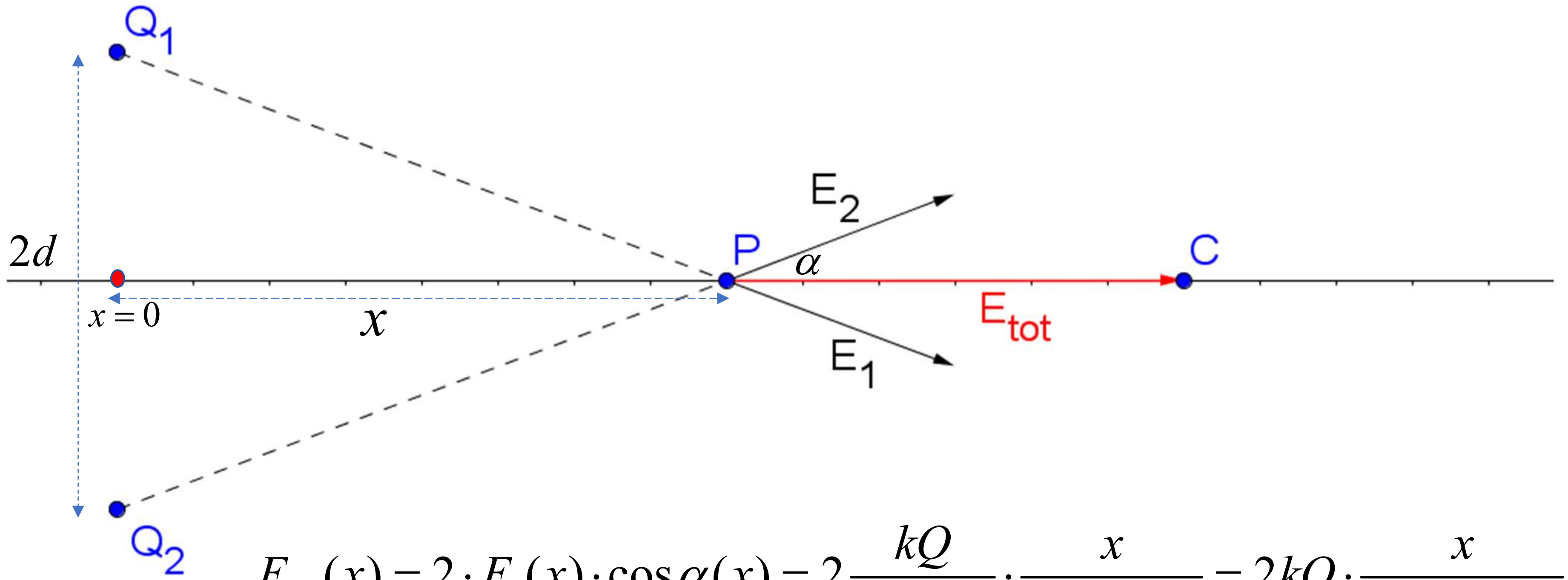


Domande guida

- Qual è la posizione del punto P all'istante t=0 ?
- Qual è la velocità del punto P all'istante t=0 ? (in modulo direzione e verso)
- In quale/i istante/i la velocità del punto P ha solo la componente orizzontale
- Cosa succede alla velocità del punto P quando t $\to +\infty$
- Qual è l'accelerazione del punto P all'istante t=0 ?
- …e all'istante t=t* nel quale il punto P si trova sul punto M ?

Moti bidimensionali

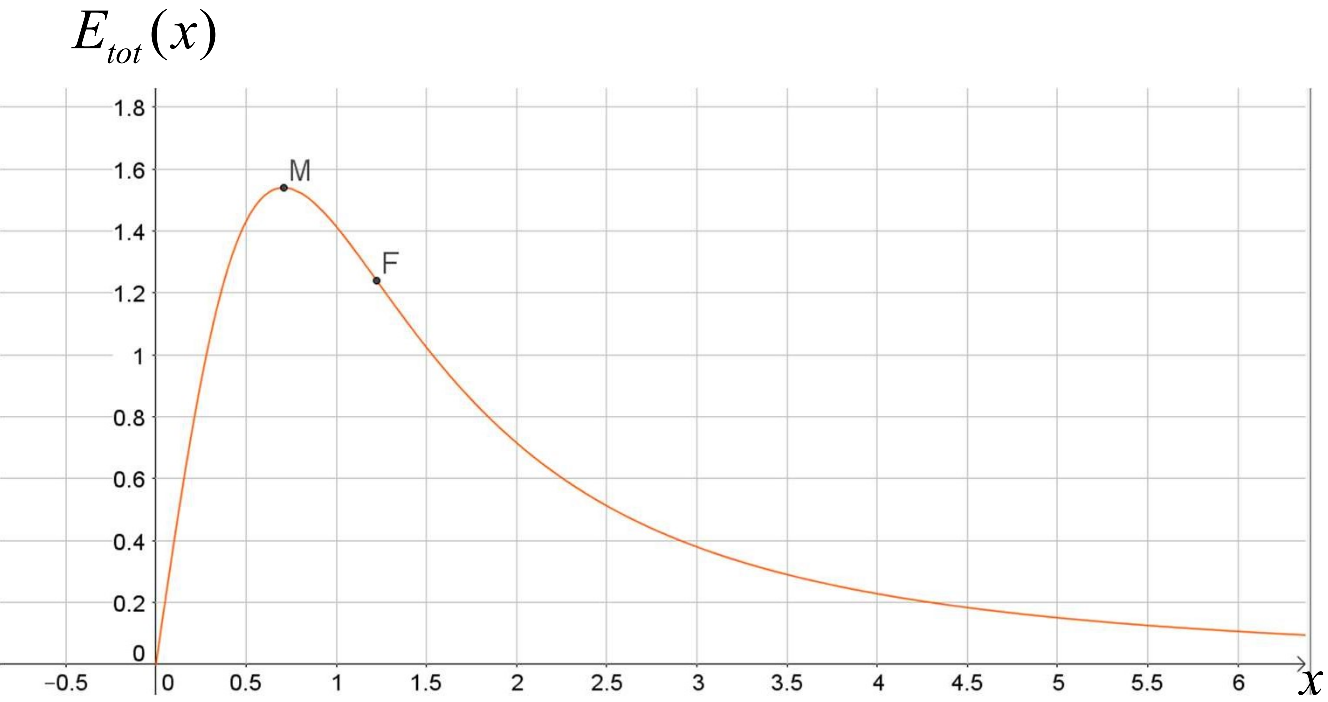
- **Reinterpretazione della funzione come modulo del campo elettrico generato da due cariche puntiformi identiche**



$$E_{tot}(x) = 2 \cdot E_1(x) \cdot \cos\alpha(x) = 2\frac{kQ}{x^2+d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = 2kQ \cdot \frac{x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_1 x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- **Reinterpretazione della funzione come modulo del campo elettrico generato da due cariche puntiformi identiche**

$$E_{tot}(x) = 2 \cdot E_1(x) \cdot \cos\alpha(x) = 2\frac{kQ}{x^2+d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = 2kQ \cdot \frac{x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k_1 x}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Domande guida

- Per quale x il campo elettrico totale ha modulo massimo ?
- Cosa succede alla funzione $E_{tot}(x)$ assegnando al parametro d il valore nullo? (interpretazione algebrica e fisica)
- Cosa succede alla funzione $E_{tot}(x)$ per valori di x molto maggiori del parametro d ? Effettua un'analisi algebrica e fornisci un'interpretazione fisica del risultato algebrico così ottenuto.

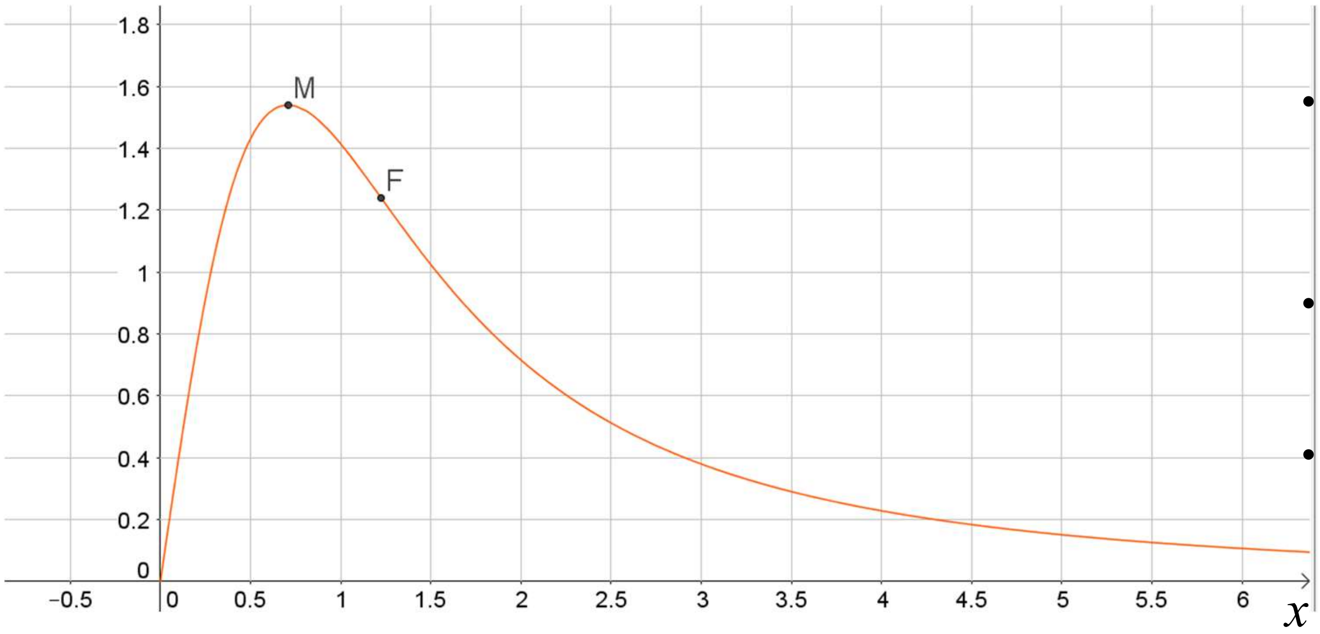
Approfondimenti

- Calcolo del campo generato da un dipolo statico
- Dipolo oscillante (esperienza di Hertz): campo vicino e campo lontano, approfondimenti sulle antenne trasmittenti e riceventi, telecomunicazioni.

- **Procedura di normalizzazione che renda la funzione assegnata una distribuzione di probabilità per una variabile aleatoria continua (con d=1)**

$$f(x) = \frac{k_1 x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$E_{tot}(x)$



Domande guida

- Assegnato al parametro d il valore 1, per quale valore della costante k_1, la funzione data è una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X?
- Qual è la funzione di ripartizione di X, cioè la

$$F(x) = p(X \leq x)$$

- Sapresti calcolare graficamente il 25° percentile, il 50° percentile (mediana) , il 75° percentile della variabile X ?
- Qual è il valore medio di X? (procedura algebrica approssimata e procedura con software grafico)

- Per quale valore della costante k_1 , la funzione data è una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X?

- A) f(x) è continua e, addirittura, derivabile nel suo dominio

- B) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ Condizione di normalizzazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{k_1 x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{k_1}{2} \int_0^x \underbrace{2t}_{f'(t)} \cdot \underbrace{(t^2+1)}_{f(t)}^{-\frac{3}{2}} dt = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{k_1}{2} \left[-2(t^2+1)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^x = \frac{k_1}{2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}} + 2 \right) = k_1 = 1$$

- **Qual è la funzione di ripartizione di X, cioè la** $F(x)=p(X\le x)$

$$F(x)=p(X\le x)=\int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x \underbrace{2t}_{f'(t)}\cdot\underbrace{(t^2+1)}_{f(t)}{}^{-\frac{3}{2}}\,dt=$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[-2(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x \Rightarrow F(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

- **Sapresti calcolare graficamente il 25° percentile, il 50° percentile (mediana) , il 75° percentile della variabile X ?**

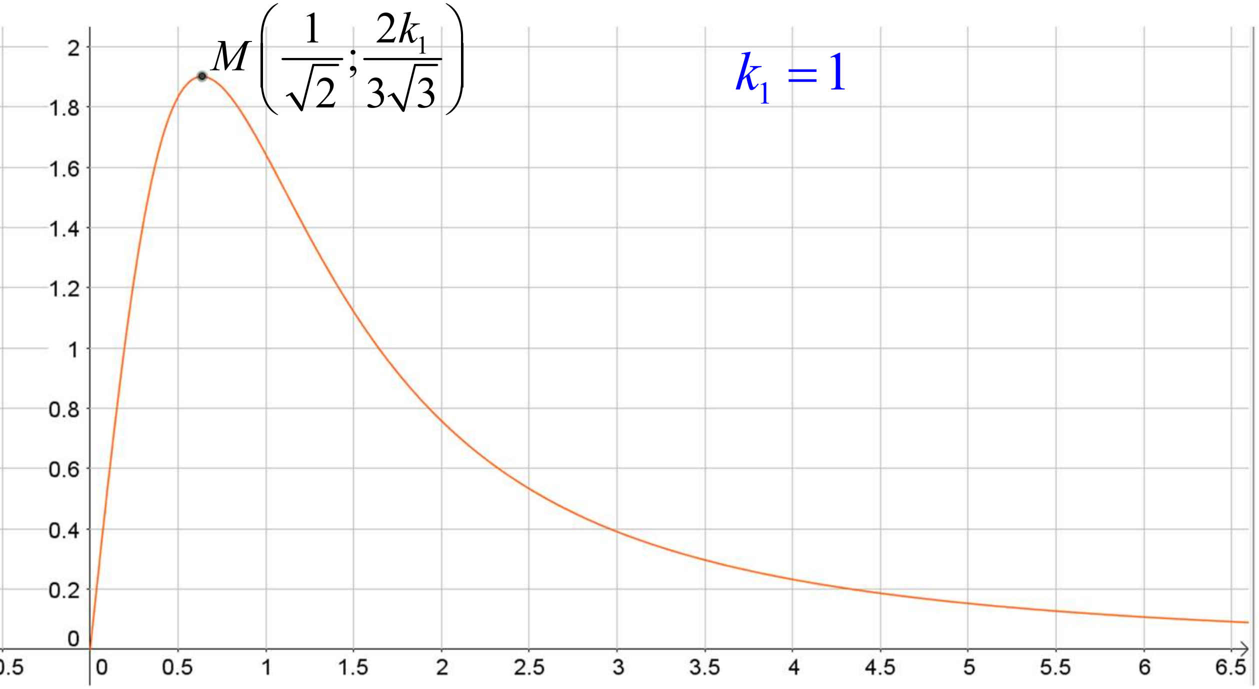
Basta porre, rispettivamente

Controllo grafico percentili

$$F(x)=\frac{1}{4}\ ,\ \ F(x)=\frac{1}{2}\ \ ,F(x)=\frac{3}{4}$$

Risolvendo le equazioni si ottiene $x_{0,25}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}\ ,\ x_{0,5}=\sqrt{3}\ \ ,x_{0,75}=\sqrt{15}$

Trasformazioni di grafici



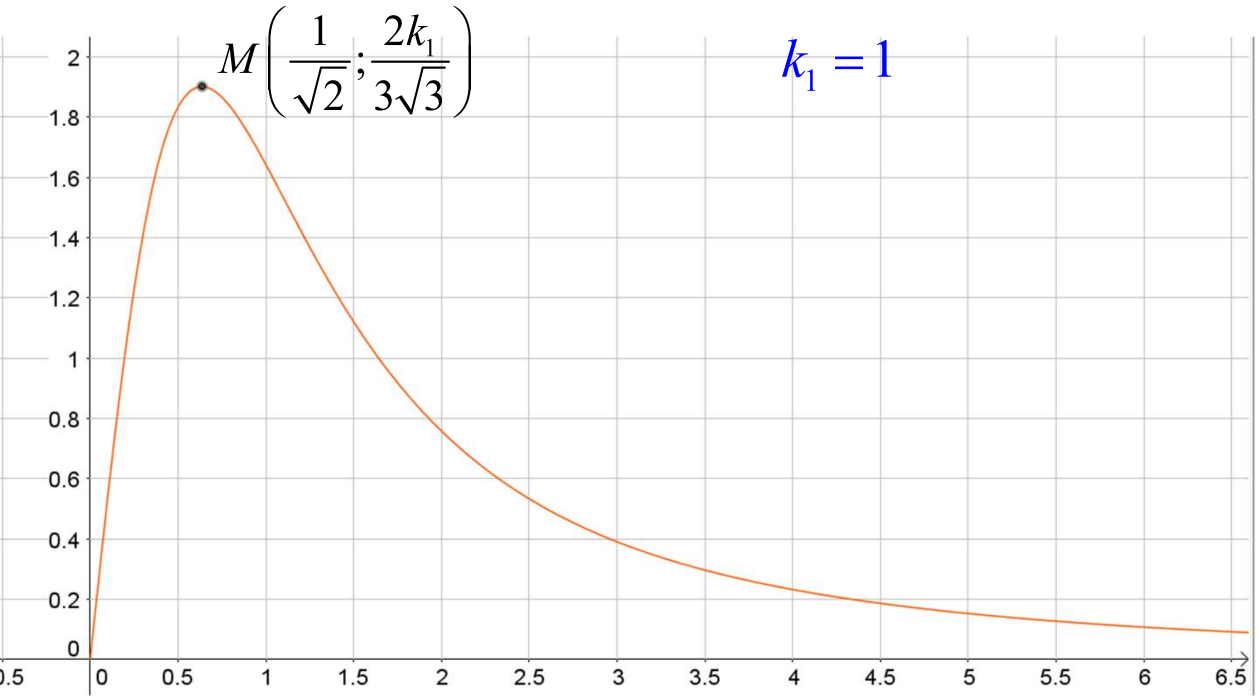
$$f(t) = \frac{k_1 t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Se volessimo che la curva data rappresentasse la potenza (in MW) erogata da una centrale elettrica in funzione del tempo (in ore) con le condizioni:

- che in ascissa misuriamo il tempo in ore (a partire dalle 8.00 di mattina)
- che se $x \in [0;6]$ allora $t' \in [0,24]$
- che la potenza massima sia pari a 8 MW
- Si calcoli poi l'energia totale erogata nelle 24 ore e la potenza media della centrale

A quale deformazione $D(\lambda_1;\lambda_2)$ dovrebbe essere sottoposto il grafico ?

Trasformazioni di grafici (I esempio: potenza di una centrale elettrica)



- Le prime due condizioni si traducono facilmente nelle condizioni

$$\begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = \dfrac{8}{\dfrac{2k_1}{3\sqrt{3}}} = \dfrac{12\sqrt{3}}{k_1} \end{cases}$$

$$\gamma : y = \frac{k_1 t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{D(4;\frac{12\sqrt{3}}{k_1})} \gamma' : \frac{y'}{\frac{12\sqrt{3}}{k_1}} = \frac{k_1 \frac{t'}{4}}{\left(\left(\frac{t'}{4}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \gamma' : y = \frac{192\sqrt{3}t}{(t^2+16)^{\frac{3}{2}}}$$

Potenza della centrale

Trasformazioni di grafici

- Per il calcolo dell'energia totale erogata nelle 24 ore dobbiamo imporre:

$$E_{tot} = \int_0^{24} \frac{192\sqrt{3}t}{(t^2+16)^{\frac{3}{2}}}dt = 96\sqrt{3}\cdot\int_0^{24}\frac{2t}{(t^2+16)^{\frac{3}{2}}}dt$$

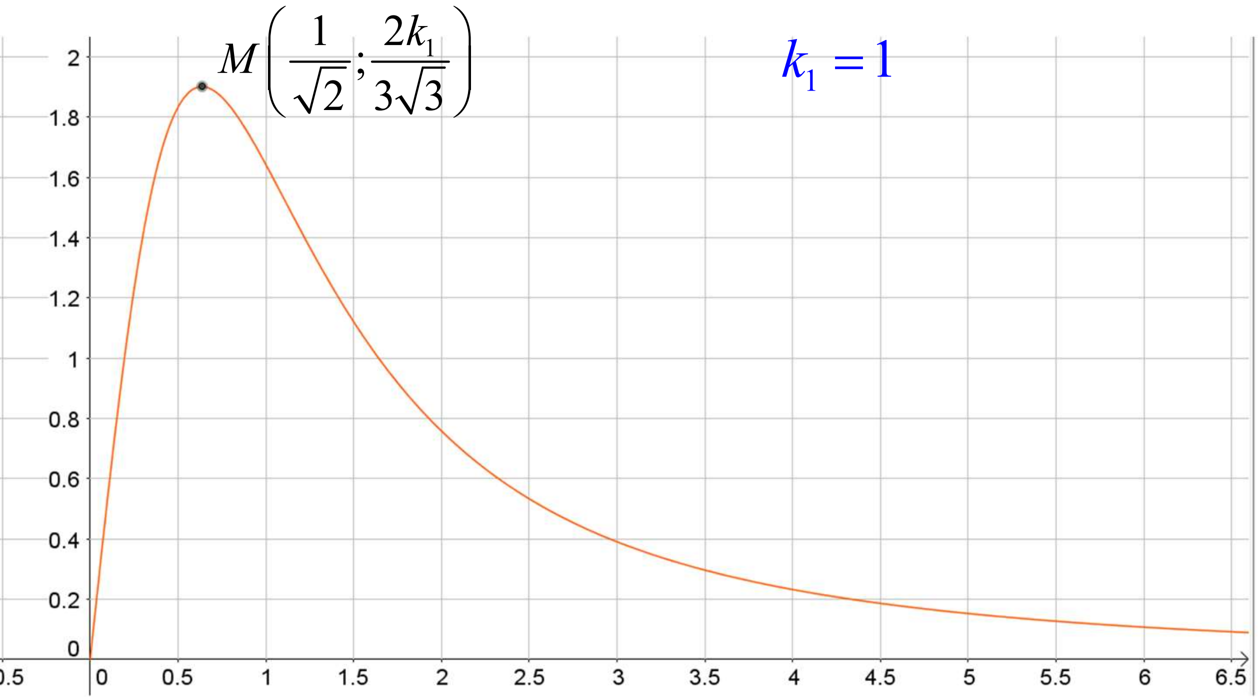
$$= 96\sqrt{3}\left[\frac{-2}{\sqrt{t^2+16}}\right]_0^{24}$$

$$= 48\sqrt{3}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{37}}\right)$$

- La potenza media erogata nelle 24 h vale ovviamente $P_{media} = \dfrac{48\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{37}}\right)}{24} = 2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{37}}\right) \cong 2{,}89MW$

Potenza della centrale

Trasf. di grafici (II esempio: reddito pro capite di una popolazione)



Supponiamo ora che la curva data rappresenti la densità di frequenza di una popolazione in funzione del reddito annuale pro-capite. Si assuma che in ascissa siano riportati i redditi in decine di migliaia di € e che

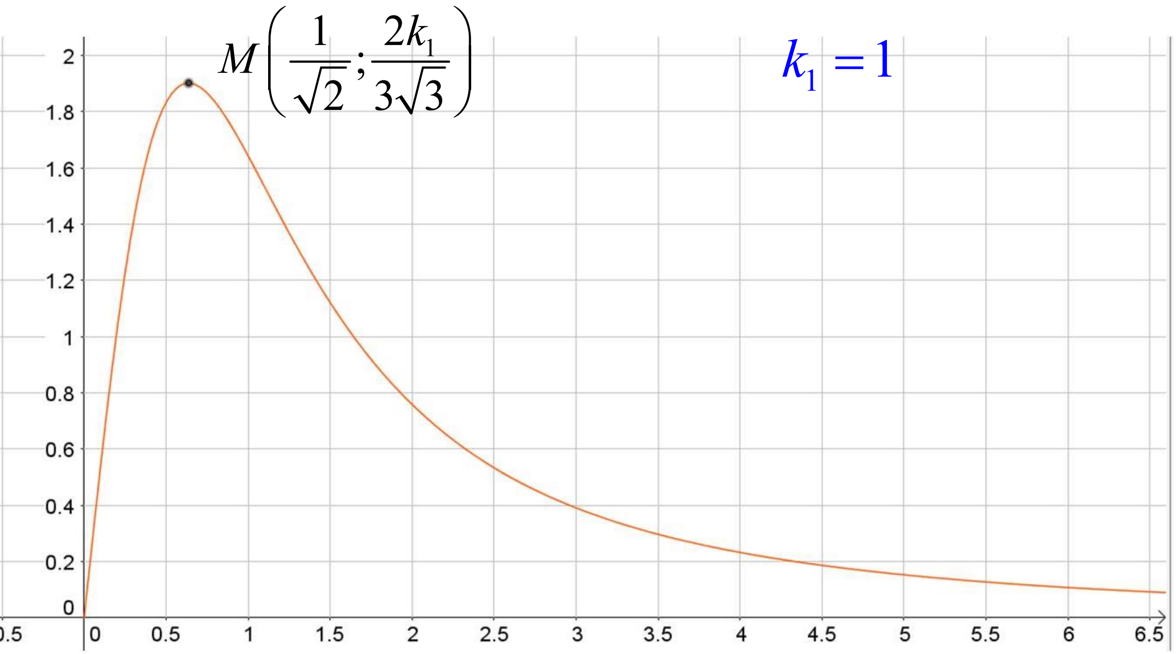
$$\int_{R_1}^{R_2} f(x)dx$$

rappresenti il numero di persone (espresso in milioni) con reddito compresso tra R_1 e R_2.

Domande guida

- A quale trasformazione devi sottoporre la curva affinché la densità di popolazione sia massima per un reddito di 20.000€/anno ?
- Quanto deve valere la costante k_1 affinché la curva data rappresenti una popolazione pari a 12.000.000 di persone ?
- Qual è il reddito medio pro-capite?
- Qual è la mediana (50% percentile) ?
- Quante persone hanno un reddito inferiore a 30.000€ ? E quante un reddito superiore a 100.000 € ?

Trasf. di grafici (II esempio: reddito pro capite di una popolazione)



Domande guida

- A quale trasformazione devi sottoporre la curva affinché la densità di popolazione sia massima per un reddito di 20.000€/anno ?

Soluzione:

L'ascissa del punto di massimo deve diventare x=2 (si ricordi che il reddito è espresso in decina di migliaia di euro). A tal fine è sufficiente la trasformazione

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = y \end{cases} \quad \text{con} \quad \lambda_1 = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$

$$\gamma : y = \frac{k_1 x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{D(2\sqrt{2};1)} \gamma' : y' = \frac{k_1 \frac{x'}{2\sqrt{2}}}{\left(\left(\frac{x'}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \gamma' : y = \frac{8k_1 x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}$$

- Quanto deve valere la costante k_1 affinché la curva data rappresenti una popolazione pari a 12.000.000 di persone ?

Soluzione:

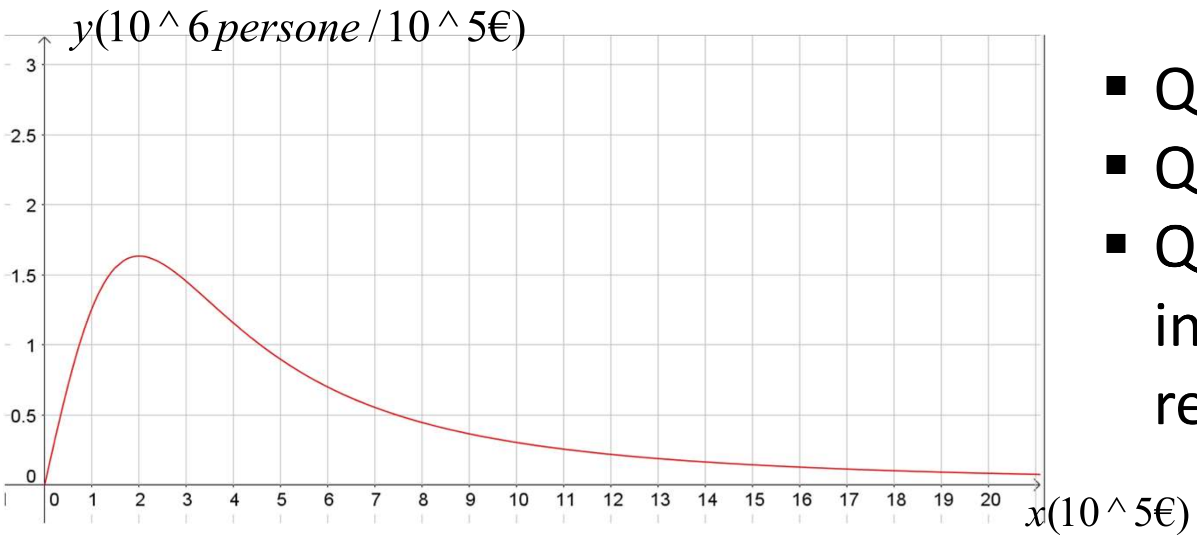
La costante k1 si determina assumendo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{8k_1 x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}} dx = 12$$

(N.B. la y esprime la densità di popolazione in Milioni di Euro/decina di migliaia di euro)

$$\int_0^{+\infty} \frac{8k_1 x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}} dx = 12 \Rightarrow 4k_1 \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}} dx = 12$$

$$k_1 = \frac{3}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}} dx} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$$



- Qual è il reddito medio pro-capite?
- Qual è la mediana (50% percentile) ?
- Quante persone hanno un reddito inferiore a 30.000€ ? E quante un reddito superiore a 100.000 € ?

Ovviamente se vogliamo che la curva data rappresenti una distribuzione di probabilità , essendo l'area della funzione trovata nella slide precedente uguale a 12, poniamo

$$d(x) = \frac{f(x)}{12} = \frac{2\sqrt{2}x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}$$

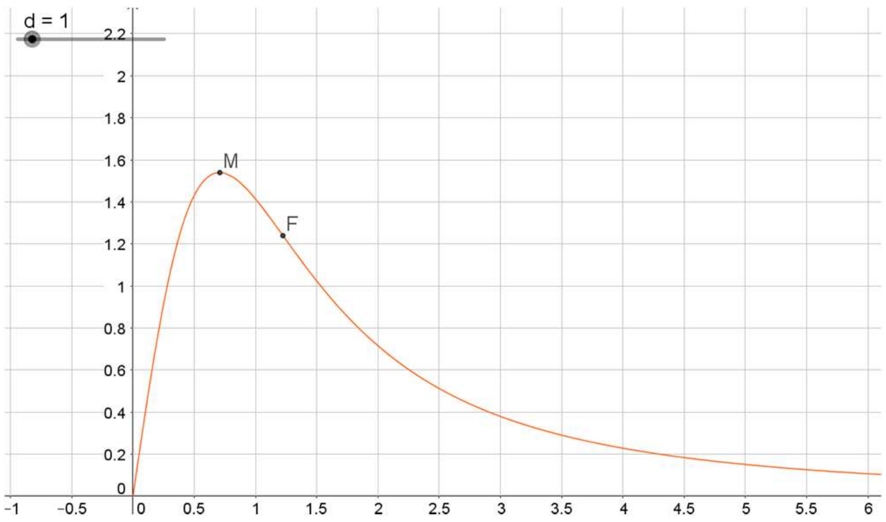
Reddito pro-capite (sol. grafiche)

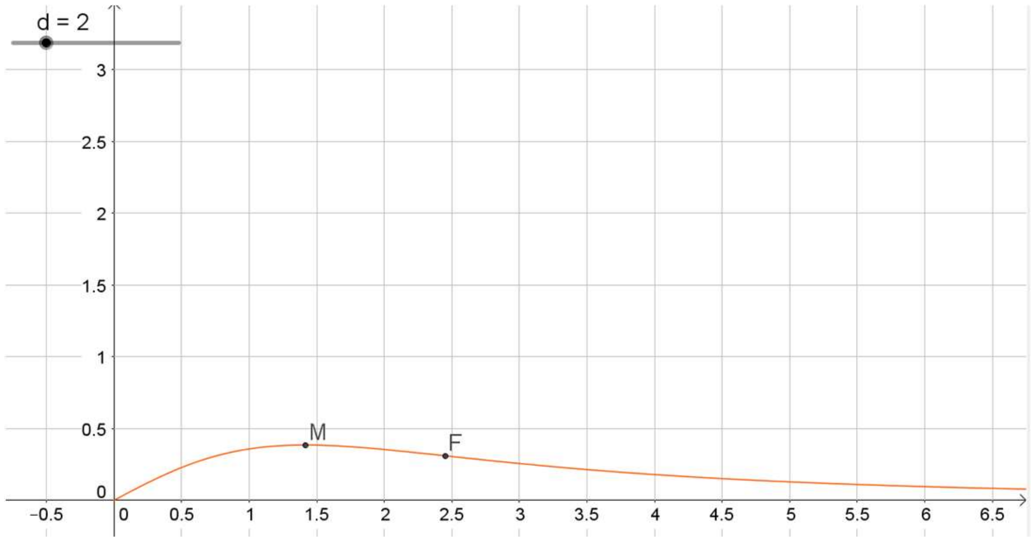
$$\overline{X} = \int_0^{+\infty} x\left(\frac{2\sqrt{2}x}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}\right)dx \cong$$

Si osservi che l'integrale generalizzato è divergente. La funzione integranda è asintoticamente equivalente , per x grandi, a 1/x !! Come risolvere il problema ?

Deformazione delle curve di reddito pro-capite

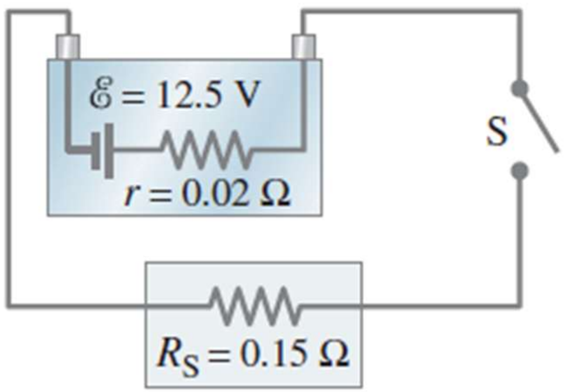
Ogni nazione ha una distribuzione del reddito pro-capite differente: ad esempio la curva dei paesi scandinavi è più piatta e meno asimmetrica della curva assunta come rappresentativa del r.p.c. nelle slide precedente. Possiamo tener conto del diverso andamento variando il parametro d nella famiglia di curve sulle quali abbiamo scelto di operare. Nei grafici seguenti sono illustrate le deformazioni indotte dalla variazione del parametro *d* (in assenza però di rinormalizzazione delle curve)





Secondo esempio di «lavoro per gruppi»

Step 1 : tutti i componenti del gruppo studiano il circuito in corrente continua rappresentato da un generatore (non ideale) di f.e.m. pari a 12,5V e resistenza interna $r = 0,02\Omega$ che sta pilotando un carico resistivo pari a $R = 0,15\Omega$



La prima richiesta è di trovare una formula generale per la corrente circolante e per la d.d.p ai capi del carico in funzione della $f.e.m = \varepsilon$ di r e di R.

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

$$V_S = \varepsilon \frac{R}{r + R}$$

Step 2: differenziazione delle attività per i vari componenti del Gruppo

- Il problema del massimo trasferimento di potenza ad un carico resistivo (o dell'adattamento di impedenza)

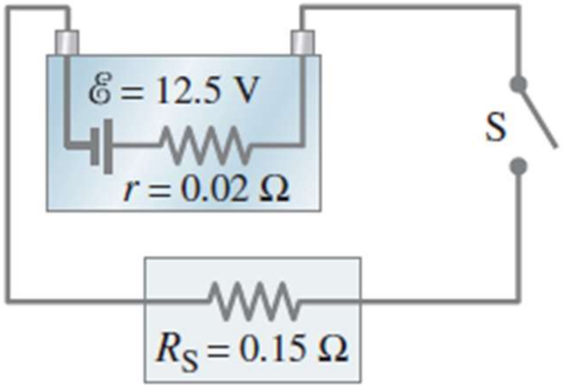
- Determinazione del punto di funzionamento per carichi non ohmici (con particolare riferimento ai diodi)

- Il problema dello smaltimento del calore prodotto per effetto Joule nei circuiti elettrici (e nel corpo umano)

- I transitori in corrente continua per carichi capacitivi (circuiti RC) e induttivi (circuiti RL)

ed eventualmente in corrente alternata nel dominio delle frequenze.

- **Il problema del massimo trasferimento di potenza ad un carico resistivo (o dell'adattamento di impedenza)**



Prescindiamo dai valori dati in figura e assumiamo la resistenza fissa (come caratteristica intrinseca del generatore reale di tensione) e la resistenza di carico incognita R_S=x.

Domande guida

- Scrivi la potenza trasferita al carico al variare di x e studia la funzione così ottenuta

- Fornisci un significato fisico dell'andamento della curva analizzando i casi asintotici per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$

- Determina il valore di x per cui la potenza trasferita al carico è massima

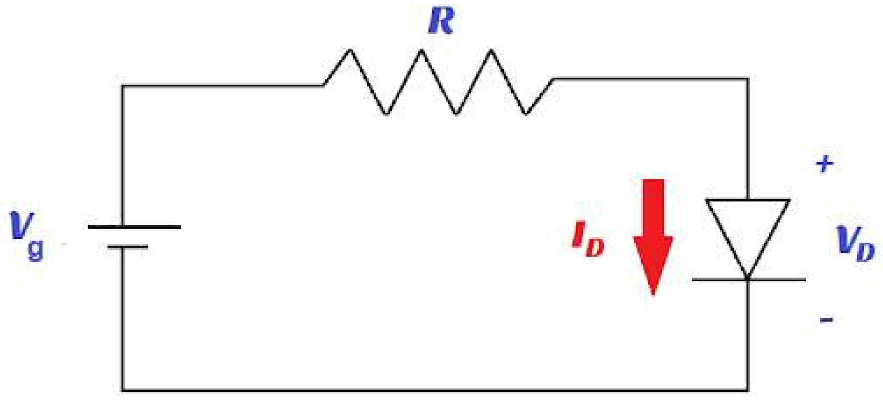
Soluzione:

$$P(x) = x \cdot \left(\frac{\varepsilon}{x + r} \right)^2$$

Approfondimenti

- Il problema dello smaltimento del calore prodotto per effetto Joule nei circuiti elettrici (e nel corpo umano)
- Il problema della «fuga termica» nei semiconduttori

- **Determinazione del punto di funzionamento per carichi non ohmici (con particolare riferimento ai diodi)**



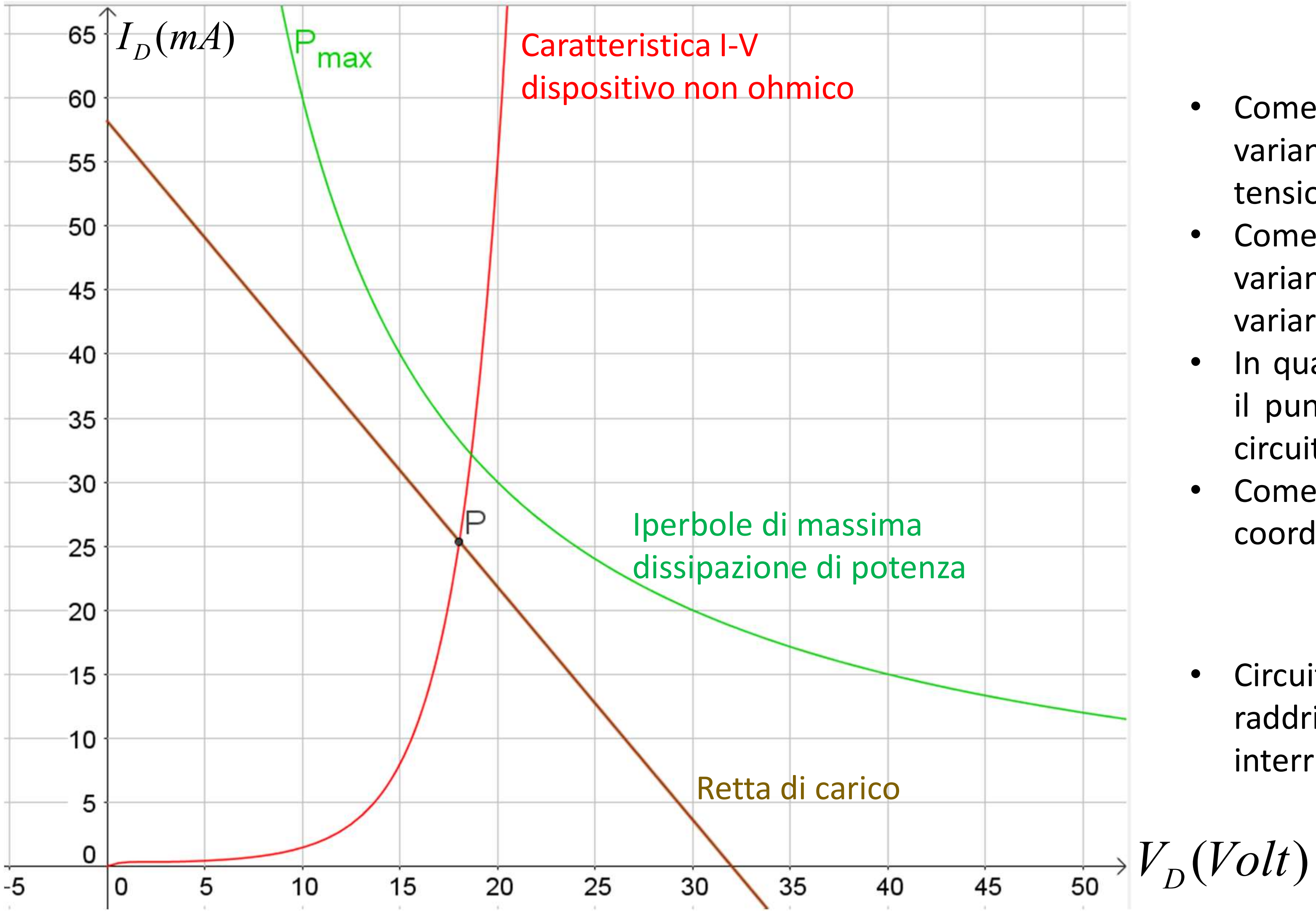
Immaginiamo di avere una circuito contenente un dispositivo non ohmico (ad esempio un diodo) del quale conosciamo la caratteristica I-V (graficamente o come espressione analitica).

Per la seconda legge di Kirchhoff possiamo scrivere che

$$V_g = V_R + V_D = RI_D + V_D$$

D'altronde le incognite I_D e V_D sono in relazione tra loro mediante la caratteristica $I_D=f(V_D)$. Data la validità contemporanea delle due equazioni otteniamo il sistema

$$\begin{cases} V_g = RI_D + V_D & \text{retta di carico} \\ \mathrm{I}_D = f(V_D) & \text{caratteristica I-V del componente non ohmico} \end{cases}$$



Soluzione grafica di circuiti non ohmici

Domande guida

- Come si muove la retta di carico variando la resistenza R, a parità di tensione del generatore ?
- Come si muove la retta di carico variando la tensione del generatore al variare di R ?
- In quale regione del piano deve giacere il punto di funzionamento P affinché il circuito funzioni correttamente ?
- Come potresti determinare le coordinate ?

Approfondimenti

- Circuiti elettrici contenenti diodi (circuiti raddrizzatori, circuiti di temporizzazione, interruttori crepuscolari, ecc..)

Ulteriori temi

- Lo studio dell'equilibrio meccanico in termini di energia potenziale
- Rappresentazioni grafiche per fenomeni ad ampia variabilità: carta logaritmica
- Modelli esponenziali (tempo di dimezzamento, andamento esponenziale….): transizione dal continuo al discreto.
- Analogie tra modelli meccanici e modelli elettromagnetici: «le stesse equazioni hanno le stesse soluzioni».
- Applicazioni del calcolo combinatorio alle modalità di riempimento dei livelli energetici per sistemi quantizzati (un primo approccio alle statistiche quantistiche per Bosoni e Fermioni)